# OMM - Izbori

April 4, 2023

# Modelovanje izbora

Osnovni pojmovi:

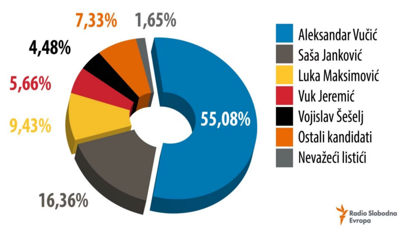
- Glasači
- Kandidati
- Izborna lista
- Mandati
- Izborne jedinice
- Biračka mesta

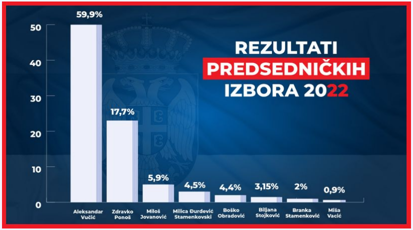
Vrste izbora:

- Većinski
- Proporcionalni
- Mešoviti

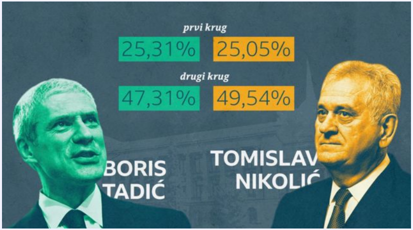
# Većinski izbori

## Predsednički izbori 2017. i 2022. - jedan krug



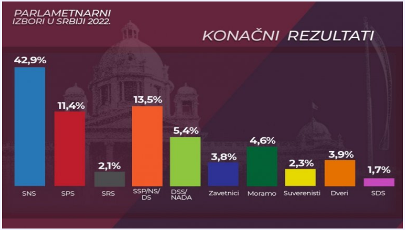



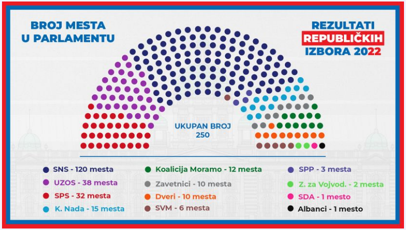

## Predsednički izbori 2012. - prvi i drugi krug

# Proporcionalni izbori

## Republički izbori 2022.




| | br.glasova | % | br.mesta | br.mesta |
|---|---|---|---|---|
| SNS | 1635101 | 42.9 | 107.25 | 107 |
| UZOS | 520469 | 13.5 | 33.75 | 33 |
| SPS | 435274 | 11.4 | 28.5 | 28 |
| DSS/NADA | 204444 | 5.4 | 13.5 | 13 |
| Moramo | 178733 | 4.6 | 11.5 | 11 |
| Dveri | 144762 | 3.9 | 9.75 | 9 |
| Zavetnici | 141227 | 3.8 | 9.5 | 9 |
| SVM | 60313 | 1.58 | 3.95 | 3 |
| SPP | 35850 | 0.94 | 2.35 | 2 |
| Vojv. | 24024 | 0.63 | 1.575 | 1 |
| SDA | 20553 | 0.54 | 1.35 | 1 |
| Alb | 10165 | 0.27 | 0.675 | 0 |
| Nevazeci | 395135 | 10.54 | | |
| ukupno | | | | 217 |
| ostalo | | | | 33 |

- Ukupno 250 mesta u parlamentu
- Ukupno osvojeno (celobrojih) 217 mesta (preko cencuza)
- Kako rasporediti preostala 33 mesta?

# D'Ontov algoritam

*Za svaku listu se računaju vrednosti $\frac{V}{s+1}$ gde je*

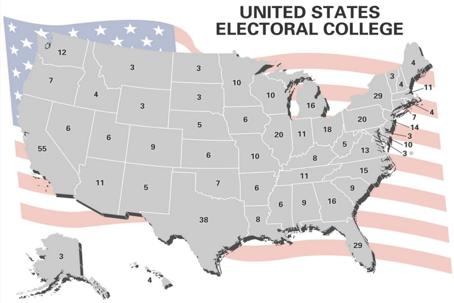
- *$V$ - broj glasova koje je dobila lista*
- *$s$ - broj mandata koje je lista dobila do sada, počevši od 0 za sve.*

*Lista koja ima najveći količnik dobija sledeći mandat, a količnici se opet račujaju. Postupak se ponavlja dok se ne raspodele svi mandati.*

| | **Странка А** | **Странка Б** | **Странка В** | **Странка Г** |
|---|---|---|---|---|
| **гласова** | 30.000 | 26.000 | 18.000 | 13.000 |
| место 1 | **30.000** | 26.000 | 18.000 | 13.000 |
| место 2 | 15.000 | **26.000** | 18.000 | 13.000 |
| место 3 | 15.000 | 13.000 | **18.000** | 13.000 |
| место 4 | **15.000** | 13.000 | 9.000 | 13.000 |
| место 5 | 10.000 | **13.000** | 9.000 | 13.000 |
| место 6 | 10.000 | 8.666 | 9.000 | **13.000** |
| место 7 | **10.000** | 8.666 | 9.000 | 6.500 |
| место 8 | 7.500 | 8.666 | **9.000** | 6.500 |
| **мандата** | **3** | **2** | **2** | **1** |

# Mešoviti izbori

- 50 država
- Svaka država ima određen broj elektora u "elektorskom koledžu". Taj broj je približno proporcionalan veličini svake države.




- Mejn i Nebraska - dele glasove elektorskog koledža prema proporciji
- Ostalih 48 država većinski (sve ili ništa)

- 538 elektora
- Kandidat koji dobije 270 ili više glasova elektora osvaja predsednički mandat (većinski).

## 2016 Election Results

| | | Candidate | Party | Electoral Votes | Popular Votes |
|---|---|---|---|---|---|
| ✓ | | Donald J. Trump | Republican | 304 | 62,984,828 |
| | | Hillary R. Clinton | Democratic | 227 | 65,853,514 |

## 2000 Election Results

| | | Candidate | Party | Electoral Votes | Popular Votes |
|---|---|---|---|---|---|
| ✓ | | George W. Bush | Republican | 271 | 50,456,062 |
| | | Albert Gore, Jr. | Democratic | 266 | 50,999,897 |

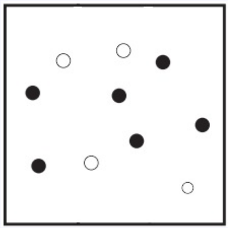
USA 1824, 1876, 1888.

# Kako (legalno) uticati na rezultate izbora (modelovanje pre izbora)

- Mi smo na vlasti ("naši")
- Popularnost "naših" opada u odnosu na "njihove"


Nešto se mora menjati. Šta?

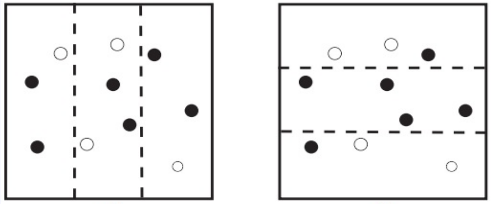
- Mi? - Nemojte se šaliti!
- Narod? - Malo teže za kratko vreme!
- Izborni sistem? - DA! Tako da odgovara "našima", naravno!



- Teritorija ima 10 birača, 3 biračka mesta
- Beli su "naši"
- Crni su "njihovi"
- Beli : Crni = 4 : 6

Na proporcionalnim izborima "mi" osvajamo samo 40% (1 mandat), a "oni" 60% (2 mandata)- gubimo vlast.

Ko određuje pravila igre? Vlast, tj. "MI"!
Promenimo sistem u većinski. Izdelimo na 3 izborne jedinice. Kako?

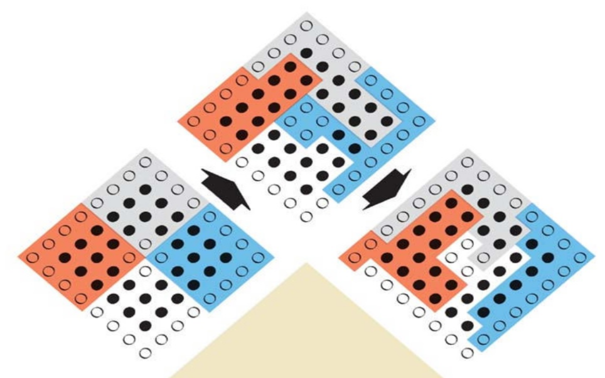


a) b)

a) Opet gubimo:
"mi" : "oni" = 0:2

b) Mi dobijamo:
"mi" : "oni" = 2:1

- 64 glasača
- 4 izborne jedinice po 16 glasača



- Levo: u svakoj izbornoj jedinici 8:8 → nerešeno!
- Sredina: crni pobeđuje u 3 izborne jedinice (10:6), a gubi u jednoj izbornoj jedinici (2:14) → pobednik je crni!
- Desno: beli pobeđuje u 3 izborne jedinice (10:6), a gubi u jednoj izbornoj jedinici (2:14) → pobednik je beli!

# Gerrymandering

*"Krojenje" biračkih mesta (ili izbornih jedinica) tako da se na većem broju izbornih jedinica obezbedi (tesna) većina, a na manjem broju izbornih jedinica da se grupisu protivnici koji pobeđuju sa velikom razlikom.*


- Masačusets 1812.
- Guverner Elbridge Gerry
- Gerry + salamander = gerrymandering
- Kao rezultat, 50.164 glasova republikanaca obezbedilo je stranci 29 mandata, dok su federalisti sa 51.766 glasova obezbedili samo 11 mesta.

# Srbija!

- Do 2002. godine lokalni (opštinski) izbori su bili većinski.
- Bujanovac - "Izborna mašinerija je u toj opštini stvorila takve mehanizme da albanski kandidat sa više hiljada glasova nije mogao osvojiti odbornička mesto, dok su srpski kandidati mesta osvajali i sa samo nekoliko stotina glasova."

# Posle izbora

- Glasanje se završava u 20h. Sledi brojanje glasova, pravljenje zapisnika,...
- Rezultati izbora - par dana kasnije kada RIK objavi tačne rezultate

Međutim...u međuvremenu:

# Kako do pouzdane procene rezultata?

- SR ima oko 8000 biračkih mesta
- Biračka mesta podelimo u stratume (15-25)

*Stratum je grupa biračkih mesta takva da se na biračkim mestima iz istog stratuma slično glasa.*

- *Iz istorijskih podataka prethodnih izbora.*
- *Nije bitno da stratumi imaju podjednak broj biračkih mesta.*
- *Nije bitno da li u odnosu na prethodne izbore neki kandidati postoje/ne postoje sada.*
- *Jedini uslov da biračka mesta A i B pripadaju istom stratumu je da se prethodno slično glasalo za kandidate x, y, z,...(ko god oni bili) i da je izlaznost slična*

- Iz svakog stratuma biramo nekoliko reprezentativnih biračkih mesta (20-30 po stratumu)

*Reprezentativna biračka mesta najbolje oslikavaju prosek kako je ceo taj stratum glasao ranije.*

- Skup izabranih reprezentativnih biračkih mesta čini reprezentativni uzorak

Na primer:
8000 biračkih mesta $\rightarrow$ 20 stratuma $\rightarrow$ po 20-30 reprezentativnih biračkih mesta po stratumu $\rightarrow$ reprezentativni uzorak od 400-600 biračkih mesta

- Rezultati dobijeni samo od reprezentativnog uzorka se ekstrapoliraju na ceo stratum.

*Ekstrapolacija: U svakom stratumu ponaosob se na osnovu rezultata glasanja sa mesta iz uzorka procenjuje ukupan broj glasova u celom stratumu.*

- Sabiranjem ekstrapoliranih vrednosti obrađenog uzorka dobijaju se procene (prognoza) rezultata celih izbora (na osnovu 20%, ..., 63.9%, ..., 100% obrađenog uzorka).

## Dodatno:

- U praksi je dovoljno da bude poznato $> 50\%$ rezultata iz uzorka za svaki stratum za pouzdanu prognozu.
- U praksi se pravi (konačni) rezultati ne razlikuju za više od 1% rezultata dobijenih na osnovu uzorka.
- Praktične stvari:
  - Kod izbora reprezentativnog uzorka voditi računa i o tome da li imamo pouzdane kontrolore za to biračko mesto.
  - Da li je u dometu mobilnih mreža, nema tehničkih smetnji itd.
  - Praćenje izlaznosti tokom izbornog dana radi provere.
  - ...

# Diktatura je najpravednija?

- Konačan broj glasača $i, j, \ldots$
- Konačan broj kandidata $x, y, z, \ldots$ (najmanje 3)
- Svaki glasač sastavlja svoju uređenu rang listu svih kandidata ili podskupa svih kandidata (ko mu se najviše svidja, do ko mu se najmanje sviđa)


- Cilj je sastaviti determinističku konačnu rang listu po nekom kriterijumu na osnovu pojedinačnih rang listi glasača.

*Relaciju rangiranja (preferencije) označimo sa* $\succ$ *(veće, bolje)*

Relacija $\succ$ zadovoljava sledeće aksiome:

1) Za svako $x$ i $y$ (kandidati) tačna je samo jedna od 3 relacije: $x \succ y$ ($x$ bolje od $y$), $y \succ x$ ($y$ bolje od $x$) ili $x = y$ (izjednačeni su).
Po definiciji uzimamo $x \prec y \iff y \succ x$ ($x$ lošije od $y$).

2) (refleksivnost): Za svako $x$ važi $x = x$

3) (tranzitivnosti): Za sve $x, y, z$ ako je $x \succeq y$ i $y \succeq z$ onda $x \succeq z$.
Pri tome, $x = z \iff (x = y) \wedge (y = z)$.
Po definiciji uzimamo:
$x \succeq y \iff (x \succ y) \vee (x = y)$
$x \preceq y \iff y \succeq x$

Oznake:

- $(x \succ y)_i$ - $x$ je bolje od $y$ za glasača $i$
- $x \succ y$ - $x$ je bolje od $y$ u konačnoj rang listi

# Šta je potrebno da glasanje bude fer i korektno?

U cilju nalaženja pravednog izbornog sistema razumno je da on ispunjava sledeće aksiome:

1) Slobodna volja - svaki glasač može kako god želi, po svojoj volji, da uredi kandidate u rang listu.
2) Nepristrasnost - svi kandidati su jednako tretirani. Ako permutujemo kandidate na spisku, rang liste pojedinačnih glasača će ostati iste.
3) Koncenzus - Ako su svi glasači glasali da je $x$ bolje od $y$ onda tako mora da bude i u konačnom rezultatu tj. ako $\forall i,\ (x \succeq y)_i \Longrightarrow x \succeq y$
4) Nezavisnost od nebitnih alternativa - Ako u dva izbora svi glasači rangiraju $x$ i $y$ međusobno isto, tada su i izborni rezultati između $x$ i $y$ isti, nezavisni od promene u rangiranju nekih drugih kandidata.
   Ako sa relacijom $\succeq$ označimo prvo glasanje, a sa $\geq$ drugo glasanje i ako $\forall i$, $(x \succeq y)_i \Longleftrightarrow (x \geq y)_i$ tada mora biti $x \succeq y \Longleftrightarrow x \geq y$.

5) Monotonost - Ako imamo 2 izbora, u prvom je $x$ bio bolji od $y$, a u drugom glasanju se poveća popularnost za $x$ u odnosu na $y$ onda i na kraju drugog izbora $x$ treba da bude bolji od $y$.
Ako sa relacijom $\succeq$ označimo prvo glasanje, a sa $\geq$ drugo glasanje i ako $\forall i$, $(x \succeq y)_i \Longrightarrow (x \geq y)_i$ i ako je $x \succeq y$ tada mora biti $x \geq y$.

6) Nema diktatora - Rezultate ne diktora jedan izabrani glasač (diktator).
Ne postoji $i$ takvo da $(x \succeq y) \Longleftrightarrow (x \succeq y)_i$

*Teorema (May)*
*Među svim sistemima glasanja sa 2 kandidata pravilo većine je jedino koje se ravnopravno odnosi prema svim kandidatima i glasačima.*

*Teorema (Kenneth Arrow) - 1972. Nobelova nagrada za ekonomiju*
*Ne postoji izborni sistem sa više od 2 kandidata koji zadovoljava aksiome 1)-6).*

Bez dokaza.

Ideja dokaza:
Ako važi prvih 5 aksioma onda sistem nužno mora biti diktatura!

Primer:
Ako postoji diktator, lako se proveri da takav sistem zadovoljava aksiome 1)- 5).

# Primer

| broj glasača | poredak |
|---|---|
| 4 | $x \succ y \succ z$ |
| 4 | $x \succ z \succ y$ |
| 0 | $y \succ x \succ z$ |
| 7 | $y \succ z \succ x$ |
| 2 | $z \succ x \succ y$ |
| 4 | $z \succ y \succ x$ |
| $\sum 21$ | |
| poeni | 3 2 1 |

Opcija 1 ($x$ je pobednik!):
$x$: 4+4=8 glasova
$y$: 0+7=7 glasova
$z$: 2+4=6 glasova

Opcija 2 ($y$ je pobednik!):
$y \succ x$: 0+7+4=11 (prosta većina)
$y \succ z$: 4+0+7 = 11 (prosta većina)

Opcija 3 ($z$ je pobednik!):
$x : 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 39$
$y : 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 43$
$z : 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 44$

# Pravilo većine za više od 2 kandidata

- Pravilo većine
- Pravilo proste većine sa (potencijalne) 2 runde (predsednički izbori u SR)

Prvi krug:

| broj glasača | poredak |
|---|---|
| 46 | $x \succ y \succ z$ |
| 24 | $y \succ z \succ x$ |
| 25 | $z \succ y \succ x$ |
| $\sum 95$ | |

$x$: 46
$y$: 24
$z$: 25

- Pravilo većine - pobeđuje $x$!
- Pravilo proste većine - niko nema $>$ 50% (tj. 48 glasova) pa ide drugi krug

Drugi krug (eliminišemo $y$):

| broj glasača | poredak |
|---|---|
| 46 | $x \succ z$ |
| 24 | $z \succ x$ |
| 25 | $z \succ x$ |
| $\sum 95$ | |

$x$: 46
$z$: 24+25=49

- Pobeđuje z!

Problem1: Ne ispunjava aksiomu 4 (nezavisnost od nebitnih alternativa).
Problem2: Neko nije izašao na glasanje.
Koliko ljudi može da utiče na krajnji ishod svojim neizlaskom?

Prvi krug:

| broj glasača | poredak |
|---|---|
| 46 | $x \succ y \succ z$ |
| 24 | $y \succ z \succ x$ |
| 25 - 2 = 23 | $z \succ y \succ x$ |
| $\sum 93$ | |

$x$: 46
$y$: 24
$z$: 23

- Pravilo većine - pobeđuje $x$!
- Pravilo proste većine - niko nema $>$ 50% (tj. 47 glasova) pa ide drugi krug

Drugi krug (eliminišemo $z$):

| broj glasača | poredak |
|---|---|
| 46 | $x \succ y$ |
| 24 | $y \succ x$ |
| 23 | $y \succ x$ |
| $\sum 93$ | |

$x$: 46
$y$: 24+23=47

- Pobeđuje y!

# Kondorset (Condorcet) metoda

*Kandidat je pobednik ako bi pobedio svakog drugog kandidata u pojedinačnom takmičenju ("1 na 1") koristeći pravilo većine.*

| broj glasača | poredak |
|---|---|
| 1 | $x \succ y \succ z$ |
| 1 | $y \succ x \succ z$ |
| 1 | $z \succ x \succ y$ |
| $\sum 3$ | |

$x : y = 2 : 1 \rightarrow$ pobeđuje $x$
$y : z = 2 : 1 \rightarrow$ pobeđuje $y$
$z : x = 1 : 2 \rightarrow$ pobeđuje $x$

---

Ukupno pobeda "1 na 1":
$x : 2, y : 1, z : 0$
Pobeđuje $x$!

Problem:

| broj glasača | poredak |
|---|---|
| 40 | $x \succ y \succ z$ |
| 25 | $y \succ z \succ x$ |
| 35 | $z \succ x \succ y$ |
| $\sum 100$ | |

$x : y = 75 : 25 \rightarrow$ pobeđuje $x$
$y : z = 65 : 35 \rightarrow$ pobeđuje $y$
$z : x = 60 : 40 \rightarrow$ pobeđuje $z$

---

Ukupno pobeda "1 na 1":
$x : 1, y : 1, z : 1$
Nerešeno!

# Borda metod (Evrovizija, Formula 1, ...)

*Na osnovu rang liste svakog glasača, svakom od n kandidata se dodeljuju bodovi/poeni: prvo mesto $n-1$ poen, drugo mesto $n-2$ poena itd. Dodeljeni bodovi se sumiraju i pobednik je kandidat sa najviše bodova.*

| broj glasača | poredak | | |
|---|---|---|---|
| 3 | $x \succ y \succ z$ | | |
| 2 | $y \succ z \succ x$ | | |
| poeni | 2 | 1 | 0 |

$x : 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6$
$y : 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$
$z : 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$

Pobeđuje $y$!

Problem: Ne zadovoljava aksiomu 4).
Neka niko nije promenio mišljenje da li je $y$ (pobednik gore) bolji od $x$.

| broj glasača | poredak | | |
|---|---|---|---|
| 3 | $x \succ y \succ z$ | | |
| 2 | $z \succ y \succ x$ | | |
| poeni | 2 | 1 | 0 |

$x : 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6$
$y : 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
$z : 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4$

Pobeđuje $x$!

# Hare metod

*Postoji (najviše) $n-1$ runda, gde je n broj kandidata. U svakoj rundi se eliminiše po jedan (najmanje poželjan) kandidat koristeći pravilo većine. Pobednik je kandidat koji pobedi u $(n-1)$-oj rundi ili ko pređe 50% glasova u nekoj prethodnoj rundi.*
*Sa 3 kandidata ovo je ekvivalentno većinskom glasanju sa 2 kruga.*

| broj glasača | poredak |
|---|---|
| 7 | $x \succ y \succ z \succ q$ |
| 6 | $y \succ x \succ z \succ q$ |
| 5 | $z \succ y \succ x \succ q$ |
| 3 | $q \succ z \succ y \succ x$ |
| $\sum 21$ | |

Prva runda:
$x$: 7 glasova
$y$: 6 glasova
$z$: 5 glasova
$q$: 3 glasa $\rightarrow$ eliminišemo $q$

| broj glasača | poredak |
|---|---|
| 7 | $x \succ y \succ z$ |
| 6 | $y \succ x \succ z$ |
| 5 | $z \succ y \succ x$ |
| 3 | $z \succ y \succ x$ |

Druga runda:
$x$: 7 glasova
$y$: 6 glasova $\rightarrow$ eliminišemo $y$
$z$: 5+3=8 glasova

| broj glasača | poredak |
|---|---|
| 7 | $x \succ z$ |
| 6 | $x \succ z$ |
| 5 | $z \succ x$ |
| 3 | $z \succ x$ |

Treća runda:
$x$: 7+6 = 13 glasova
$z$: 5+3=8 glasova
Pobednik je $x$!

Problem: Ne zadovoljava aksiomu 5 (monotonost).
Neka 3 glasača koja su glasala $q \succ z \succ y \succ x$ promene mišljenje tako da najviše vole $x$ (pobednika gore), tj. $x$ sa poslednjeg mesta dođe na prvo na njihovim listama.

| broj glasača | poredak |
|---|---|
| 7 | $x \succ y \succ z \succ q$ |
| 6 | $y \succ x \succ z \succ q$ |
| 5 | $z \succ y \succ x \succ q$ |
| 3 | $x \succ q \succ z \succ y$ |
| $\sum 21$ | |

Prva runda:
$x$: 7+3=10 glasova
$y$: 6 glasova
$z$: 5 glasova
$q$: 0 glasova $\rightarrow$ eliminišemo $q$

| broj glasača | poredak |
|---|---|
| 7 | $x \succ y \succ z$ |
| 6 | $y \succ x \succ z$ |
| 5 | $z \succ y \succ x$ |
| 3 | $x \succ z \succ y$ |

Druga runda:
$x$: 7+3=10 glasova
$y$: 6 glasova
$z$: 5 glasova $\rightarrow$ eliminišemo $z$

| broj glasača | poredak |
|---|---|
| 7 | $x \succ y$ |
| 6 | $y \succ x$ |
| 5 | $y \succ x$ |
| 3 | $x \succ y$ |

Treća runda:
$x$: 7+3=10 glasova
$y$: 6+5=11 glasova
Pobeđuje $y$!

# Glasanje o odobrenju (izbor Saveta fakulteta, novih članova Akademije, Bejzbol kuće slavnih...)

- *Treba izabrati $k$ kandidata od $n$ ($k < n$).*
- *Svaki birač može da da po jedan glas svim kandidatima koje smatra prihvatljivim (od 0 do $n$).*
- *Kandidati se sortiraju na osnovu ukupnog broja osvojenih glasova svih birača.*
- *Prvih $k$ kandaidata sa spiska osvaja mandate.*

# Sekvencijalno glasanje u paru

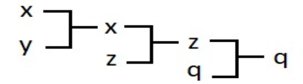
*Počinje se sa unapred zadatom listom kandidata. Takmiče se prvi i drugi sa spiska "1 na 1". Pobednik odlazi u drugu rundu u takmičenje sa trećim sa spiska. Proces se nastavlja kroz celu listu sve dok ne ostane 1 kandidat koji je pobednik.*

| broj glasača | poredak |
|---|---|
| 4 | $x \succ y \succ q \succ z$ |
| 3 | $z \succ x \succ y \succ q$ |
| 3 | $y \succ q \succ z \succ x$ |
| lista: | $x - y - z - q$ |

Prva runda: ($x$ vs $y$)
$x$: 4+3=7 bodova
$y$: 3 boda
U duelu pobeđuje $x$.

Druga runda: ($x$ vs $z$)
$x$: 4 boda
$z$: 3+3=6 bodova
U duelu pobeđuje $z$.

Treća runda: ($z$ vs $q$)
$z$: 3 bodova
$q$: 4+3=7 boda
U duelu pobeđuje $q$.




Pobeđuje $q$!

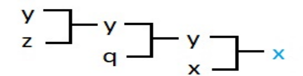
**Problem:** Ne zadovoljava aksiomu 3 (koncenzus).

| broj glasača | poredak |
|---|---|
| 4 | $x \succ y \succ q \succ z$ |
| 3 | $z \succ x \succ y \succ q$ |
| 3 | $y \succ q \succ z \succ x$ |
| lista: | $x - y - z - q$ |

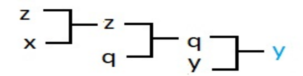
Pobednik je bio $q$.
U prethodnom primeru svi glasači su preferirali $y$ nad $q$. Aksioma kaže da $q$ onda ne može biti pobednik.

**Problem:** Ne zadovoljava aksiomu 2 (nepristrasnost).
Sa različitim izborom uređene liste po kom redosledu će se takmičiti svaki kandidat može pobediti.

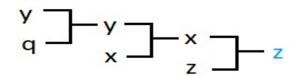
Lista: $y - z - q - x$




Lista: $z - x - q - y$




Lista: $y - q - x - z$



# Zadatak (The stable marriage problem)

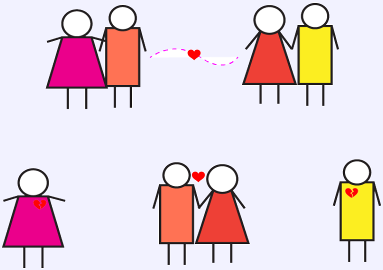
- $I_m$ - skup od $N$ muškaraca, $i \in I_m$
- $I_w$ - skup od $N$ žena, $j \in I_w$

- Svaki mušakarac $i \in I_m$ rangira sve žene:
  $\forall j_1, j_2 \in I_w,\ j_1 \succ_i j_2$ akko muškarac $i$ preferira ženu $j_1$ u odnosu na ženu $j_2$.
- Svaka žena $j \in I_w$ rangira sve muškarce:
  $\forall i_1, i_2 \in I_m,\ i_1 \succ_j i_2$ akko žena $j$ preferira muškarca $i_1$ u odnosu na muškarca $i_2$.

- **Uparivanje** je bijekcija $i \leftrightarrow \tau(i)$:
  Svaki muškarac $i \in I_m$ se oženi sa jednom ženom $\tau(i) \in I_w$
  i svaka žena $j \in I_w$ se uda za jednog muškarca $\tau^{-1}(j) \in I_m$

**Blokirajući par** $(i, j) \in I_m \times I_w$ je definisan na sledeći način:

- $i$ i $j$ nisu međusobno venčani, tj. $j \neq \tau(i)$
- Muškarac $i$ više preferira ženu $j$ od svoje žene $\tau(i)$, tj. $j \succ_i \tau(i)$
- Žena $j$ više preferira muškarca $i$ od svog muža $\tau^{-1}(j)$, tj. $i \succ_j \tau^{-1}(j)$



*Uparivanje $\tau$ (brak) je stabilno akko ne postoje blokirajući parovi.*

(Ukolikio postoji blokirajući par on će rasturiti 2 braka)

# Gale & Shapley algoritam

Korak 1: Svaki muškarac $i \in I_m$ zaprosi ženu $j \in I_w$ koja je na vrhu njegove liste.
Na kraju ovog koraka neke žene će dobiti bračnu ponudu, neke neće, neke će dobiti i više ponuda.

Korak 2: Veridba: Svaka žena koja je dobila jednu ili više bračnih ponuda izabere od tih muškaraca onog koji se najbolje rangira na njenoj listi.
Na kraju ove faze skup $I_m$ je podeljen na 2 grupe: vereni i (i dalje) slobodni.

Korak 3: Ukoliko ima slobodnih muškaraca: svaki slobodan muškarac zaprosi ženu koja mu je sledeća na spisku (bez obzira da li je verena ili slobodna). Idi na korak 2.

Korak 1:

Muškarci:

$M_1 : Z_4 \succ Z_2 \succ Z_1 \succ Z_3$
$M_2 : Z_1 \succ Z_2 \succ Z_4 \succ Z_3$
$M_3 : Z_3 \succ Z_1 \succ Z_2 \succ Z_4$
$M_4 : Z_3 \succ Z_4 \succ Z_2 \succ Z_1$

Žene:

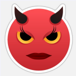
$Z_1 : M_1 \succ M_2 \succ M_3 \succ M_4$
$Z_2 : M_2 \succ M_3 \succ M_1 \succ M_4$
$Z_3 : M_3 \succ M_2 \succ M_1 \succ M_4$
$Z_4 : M_3 \succ M_1 \succ M_2 \succ M_4$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Korak 2: | $(M_1 \to Z_4)$ | $(M_2 \to Z_1)$ | $(M_3 \to Z_3)$ | $(M_4 \to Z_3)$ |
| Korak 3: | $(M_1 \heartsuit Z_4)$ | $(M_2 \heartsuit Z_1)$ | $(M_3 \heartsuit Z_3)$ | |
| Korak 2: | | | | $(M_4 \to Z_4)$ |
| Korak 3: | $(M_1 \heartsuit Z_4)$ | | | |
| Korak 2: | | | | $(M_4 \to Z_2)$ |
| Korak 3: | | | | $(M_4 \heartsuit Z_2)$ |

- Algoritam će se završiti u konačnom broju koraka.
- Na kraju algoritma su svi upareni (vereni).
- Na kraju algoritma je dobijeno stabilno uparivanje.

ALI...

- Ovo je algoritam koji je najbolji za muškarce.
- Ako bi žene vršile prosidbu, algoritam bi opet bio stabilan, ali najbolji za žene.

Modifikacija: 

Pošto žene znaju da ovim algoritmom "izvlače deblji kraj", međusobno će ispričati kako je koja glasala i tako primeniti drugačiju strategiju u koraku 3.

# Žene vrše prvi korak:

Muškarci:

$M_1 : Z_4 \succ Z_2 \succ Z_1 \succ Z_3$
$M_2 : Z_1 \succ Z_2 \succ Z_4 \succ Z_3$
$M_3 : Z_3 \succ Z_1 \succ Z_2 \succ Z_4$
$M_4 : Z_3 \succ Z_4 \succ Z_2 \succ Z_1$

Žene:

$Z_1 : M_1 \succ M_2 \succ M_3 \succ M_4$
$Z_2 : M_2 \succ M_3 \succ M_1 \succ M_4$
$Z_3 : M_3 \succ M_2 \succ M_1 \succ M_4$
$Z_4 : M_3 \succ M_1 \succ M_2 \succ M_4$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Korak 2: | $(Z_1 \to M_1)$ | $(Z_2 \to M_2)$ | $(Z_3 \to M_3)$ | $(Z_4 \to M_3)$ |
| Korak 3: | $(Z_1 \heartsuit M_1)$ | $(Z_2 \heartsuit M_2)$ | $(Z_3 \heartsuit M_3)$ | |
| Korak 2: | | | | $(Z_4 \to M_1)$ |
| Korak 3: | $(Z_1 \times M_1)$ | | | $(Z_4 \heartsuit M_1)$ |
| Korak 2: | $(Z_1 \to M_2)$ | | | |
| Korak 3: | $(Z_1 \heartsuit M_2)$ | $(Z_2 \times M_2)$ | | |
| Korak 2: | | $(Z_2 \to M_3)$ | | |
| Korak 3: | | | $(Z_3 \heartsuit M_3)$ | |
| Korak 2: | | $(Z_2 \to M_1)$ | | |
| Korak 3: | | | | $(Z_4 \heartsuit M_1)$ |
| Korak 2: | | $(Z_2 \to M_4)$ | | |
| Korak 3: | | $(Z_2 \heartsuit M_4)$ | | |

# Još jedan zadatak

*Igrači A i B igraju igricu u kojoj svako od njih baca kockicu i ko dobije veći broj pobeđuje.*
*Postoje 3 kockice sa brojevima:*

- *I kockica: 5, 7, 8, 9, 10, 18*
- *II kockica: 2, 3, 4, 15, 16, 17*
- *III kockica: 1, 6, 11, 12, 13, 14*

*Igrači biraju kockicu. Da li je bolje birati prvi ili drugi?*

| I/II | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | I | I | I | I | I | I |
| 3 | I | I | I | I | I | I |
| 4 | I | I | I | I | I | I |
| 15 | II | II | II | II | II | I |
| 16 | II | II | II | II | II | I |
| 17 | II | II | II | II | II | I |

U 21 od 36 slučajeva pobeđuje I kockica.
Verovatnoća da I kockica pobedi II je 21/36

| III/II | 2 | 3 | 4 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | II | II | II | II | II | II |
| 6 | III | III | III | II | II | II |
| 11 | III | III | III | II | II | II |
| 12 | III | III | III | II | II | II |
| 13 | III | III | III | II | II | II |
| 14 | III | III | III | II | II | II |

U 21 od 36 slučajeva pobeđuje II kockica.
Verovatnoća da II kockica pobedi III je 21/36

| I/III | 1 | 6 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | I | III | III | III | III | III |
| 7 | I | I | III | III | III | III |
| 8 | I | I | III | III | III | III |
| 9 | I | I | III | III | III | III |
| 10 | I | I | III | III | III | III |
| 18 | I | I | I | I | I | I |

U 21 od 36 slučajeva pobeđuje III kockica.
Verovatnoća da III kockica pobedi I je 21/36

Relacija "bolji od" je ovde definisana kao $x \succ y \iff p(x > y) > 1/2$.

Ovako definisana relacija nije tranzitivna!

Ni jedna kockica nije bolja od ostale dve $I \succ II \succ III \succ I$ (papir-kamen-makaze).

Bolje će proći onaj ko bira kockicu drugi!